සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2025
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2025

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) (I) $a(\neq 0),\ b,\ c \in \mathbb{R}$ වන පරිදි $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු.

(i) $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික ධන මූල ඇත්නම්,
$a^2x^2 + a(3b - 2c)x + (2b - c)(b - c) + ac = 0$ සඳහා ද තාත්ත්වික ධන මූල පවතින බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x) = 0$ හි මූල α හා $\beta\ (\alpha < \beta)$ වේ නම් $a^3x^2 + abcx + c^3 = 0$ හි මූල අපෝහනය කරන්න.

(II) $k \in \mathbb{Z}^-$ හා $k > -4$ නම් $\left|k - \dfrac{30}{k^2}\right|$ හා $\left|k + \dfrac{30}{k^2}\right|$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $k^4x^2 - 60k^2x + 900 - k^6 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) (i) $P(x) = 6x^3 + ax^2 - 3x + b$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a,\ b \in \mathbb{R}$ වේ. $P(x)$ යන්න $6x^2 + x - 2$ න් බෙදේ නම් a හා b සොයන්න.

(ii) **එනයින්** $P(x) = 0$ විසඳන්න.

(iii) තවද $6x^6 + ax^4 - 3x^2 + b = 0$ හි තාත්ත්වික විසඳුම් **අපෝහනය** කරන්න.

12. (a) පාසලක තාරකා විද්‍යා සංගමයේ කමිටුවට සිසුන් හත් දෙනෙකු සහ සිසුවියන් හය දෙනෙකු ඇතුළත්වේ. පේරාදෙණිය විශ්ව විද්‍යාලයේ පවත්වන තාරකා විද්‍යා රාත්‍රී කඳවුර සඳහා පාසල නියෝජනය කිරීමට මොවුන් අතරින් පස් දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක් පත්කර ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත.

(i) සීමා කිරීමක් නොමැති විට

(ii) සිසුවියන් හා සිසුන් 2 : 3 අනුපාතයකට සිටින විට

(iii) එක්තරා සිසුවියක් හා එක්තරා සිසුවෙක් රාත්‍රී කඳවුරට එකවර සහභාගී නොවන විට

(iv) අවම වශයෙන් සිසුවියන් දෙදෙනෙකුවත් ඇතුළත් වන පරිදි

ඉහත කණ්ඩායම් තේරිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $\ln(4)+\ln\left(\frac{27}{4}\right)+\ln\left(\frac{256}{27}\right)+\cdots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය Ur ලියා දක්වන්න.

ඒනයින්, $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=f(r+1)-f(r)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා $n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා,

$\sum_{r=1}^{n}U_r=(n+1)\ln(n+1)$ බව පෙන්වන්න.

$r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා, $W_r=U_{3r-2}+U_{3r-1}+U_{3r}$ යැයි ගනිමු.

$n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}w_r$ සොයා ඒනයින්, $\sum_{r=1}^{\infty}w_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව වැඩිදුරටත් පෙන්වන්න.

13. (a) $A=\begin{bmatrix} a & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ යනු $A^T=A^{-1}$ වන පරිදි වූ න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. මෙහි $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

$D\left[(CB)^T-2[A]^{-1}\right]=I$ වන පරිදි D^{-1} න්‍යාසය සොයන්න.

මෙහි I යනු ගණය 2×2 වන ඒකක න්‍යාසයක් හා $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ හා $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ වේ.

(b) $Z\in\mathbb{C}$ විට $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ හා $z-\bar{z}=2\,\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$ බව පෙන්වන්න.

ආගන්ඩ් සටහනක, $(2-\mathrm{i})\bar{z}+(2+\mathrm{i})z-14=0$ සහ $(1+\mathrm{i})\bar{z}+(1-\mathrm{i})z-16=0$ සමීකරණ මගින් දක්වෙන සරල රේඛා දෙකක් A ලක්ෂ්‍යයේ දී ඡේදනය වේ. සමගාමී ආකාරයට විසඳීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ A මගින් දක්වෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $5+3\mathrm{i}$ බව පෙන්වන්න. B ලක්ෂ්‍යයෙන් දක්වෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $1+\mathrm{i}$ වන විට AB විෂ්කම්භය වශයෙන් ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $z\bar{z}-(3+2\mathrm{i})\bar{z}-(3-2\mathrm{i})z+8=0$ වන බව පෙන්වන්න.

(c) $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ යැයි ගනිමු. $n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** භාවිතයෙන් $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න. එමෙන් ම **ද්විපද ප්‍රසාරණය** භාවිතයෙන් ද $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබාගෙන, ඒනයින් $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ බව හා $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) $x \in \mathbb{R} - \{b\}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2(x+a)}{(x+b)^2}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වෙයි. $x \in \mathbb{R} - \{a, 0\}$ සඳහා $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ යැයි ගනිමු.

$x = 1$ යන්න $g(x) = 0$ හි මූලයක් සහ $x = 2$ යන්න $y = g(x)$ හි සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් බව දී ඇති විට a හා b අගයන් ලියා දක්වන්න. a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තරය සොයන්න. $x \neq 1$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{-2(x+2)}{(x-1)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ අවතලතාව විස්තර කරන්න.

$g'(x) = \dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$ බව පෙන්වන්න. එය භාවිතයෙන් $y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) කාලය දී $t = 0$ දී තිරසට θ ආනතියකින් යුක්තව u ප්‍රවේගයෙන් තිරස් බිමක O ලක්ෂ්‍යයක සිට ප්‍රක්ෂේපනය කළ අංශුවක් කාලය $t = t$ හි දී O සිට a තිරස් දුරකින් වූ h සිරස් උසැති තාප්පයක් යන්තමින් පසුකරන බව දී ඇත. තාප්පයෙහි h උස සඳහා θ ඇසුරින් සමීකරණයක් ගොඩනගන්න. (මෙහි u සහ a නියත බව සලකන්න.) ඒනයින් $u^2 = ga$ වන විට h උස උපරිම වන θ අගය ලබා ගැනීම සඳහා අවකලන දනුම යොදා ගන්න. තාප්පයේ උපරිම උස ගණනය කරන්න.

15. (a) $x \neq -2$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x^2+8)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$f'(x) = \dfrac{1}{12\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\right) + \ln\left[\dfrac{(x+2)^2}{x^2+8}\right] + C$ බව අපෝහනය කරන්න.

$+ \frac{1}{24} \ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8}\right]$

(b) $I = \displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x)\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගනිමින්,

(i) $I + J = e^{\frac{\pi}{2}}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) I හා J අතර තවත් රේඛීය සම්බන්ධතාවක් ලබා ගන්න.

(iii) $I = \dfrac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ බව පෙන්වා J සොයන්න.

(c) $a \in \mathbb{R}$ විට $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$$\int_0^{\pi} \frac{x\ dx}{9\sin^2 x + 25\cos^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{9\sin^2 x + 25\cos^2 x}$$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\ dx}{9\sin^2 x + 25\cos^2 x}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

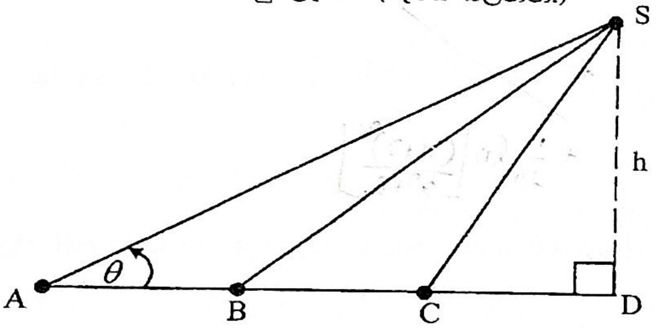
16. $A \equiv (3, -2)$ යැයි ගනිමු. A හරහා ගමන් කරනු ලබන ඕනෑම සරල රේඛාවක් l යැයි ගනිමු. l යන්න $l \equiv x + \lambda y + 2\lambda - 3 = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වෙයි. $l = 0$ රේඛාව $2x - y + 2 = 0$ සරල රේඛාවට ලම්භක වන පරිදි λ අගයන්න. තවදුරටත් $l = 0$ හා $2x - y + 2 = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය B නම් B හි ඛණ්ඩාංකය ලියා දක්වන්න. C යනු t තාත්ත්වික පරාමිතියක් වන පරිදි $C \equiv (t, 2(t+1))$ මගින් දෙන ලක්ෂ්‍යය නම්, $AC = 2\sqrt{10}$ වන පරිදි t අගයන්න. මෙහි $t \in \mathbb{Z}^+$ වේ. A කේන්ද්‍රය වූ ඕනෑම වෘත්තයක් $S = 0$ යැයි ගනිමු. $S = 0$ වෘත්තයට C හි සිට ඇඳි ස්පර්ශක ජ්‍යාය $x - 3y + 1 = 0$ බව දී ඇත්නම් S සොයන්න. $S = 0$ වෘත්තය හා $x - 3y + 1 = 0$ රේඛා D හි දී හමුවේ නම්, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරනු ලබන වෘත්තය $x^2 + y^2 + 2\mu x + \mu y = 5$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිලයකි. තවදුරටත් S වෘත්තය මගින් $x^2 + y^2 + 2\mu x + \mu y = 5$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න. D හි ඛණ්ඩාංක ද ලියා දක්වන්න.

17. (a) $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$ හා $\cos B$ පද ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා ඒනයින් $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ බව ලබා ගන්න. තවදුරටත් $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ බවත් අපෝහනය කරන්න.

දැන්, $x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $T(x) = \dfrac{2\cos 3x - 4\cos^5 x + 3\cos^3 x}{\cos x(1 + \sin^2 x)}$ යැයි ගනිමු.

$T(x) = A\cos(2x - \alpha) + B$ වන පරිදි A, B හා $\alpha \left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ නියත සොයන්න. ඒනයින්, T ශ්‍රිතයේ පරාසය ලියා දක්වා $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ වසම තුළ $y = T(x)$ ප්‍රස්තාරගත කරන්න.

(b) තිරස් පොළොවක් මත පිහිටි A, B හා C නිරීක්ෂක මධ්‍යස්ථාන තුනක සිට, සිරස්ව h උසකින් පිහිටි S තරුවක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. (රූපය බලන්න.)



$S\hat{A}B = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$ බවත් $S\hat{A}D : S\hat{B}D : S\hat{C}D = 1 : 2 : 3$ බවත් $AB = a$, $BC = b$ බවත් දී තිබේ.

$SBC\Delta$ සඳහා sin නීතිය යෙදීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $b > \frac{a}{3}$ බව පෙන්වා, $\sin\theta : \cos\theta = \sqrt{3b - a} : \sqrt{a + b}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තවදුරටත් $SCD\Delta$ හා $SBC\Delta$ උපයෝගී කරගනිමින් $\sin 2\theta = \frac{h}{a}$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්** S තරුවට ඇති සිරස් උස $\frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 + 2ab - a^2}$ බව ලබා ගන්න.

(c) x සඳහා සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

$$\cos^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$; විසඳන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2025
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2025

සංයුක්ත ගණිතය II
Combined Mathematics II

10 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

11. (*a*) X දුම්රියක් A දුම්රියපොළකින් නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹා f ත්වරණයකින් $\sqrt{142}\dfrac{u}{f}$ කාලයක් චලනය වීමෙන් පසු B දුම්රියපොළට ළඟාවේ.

(i) A හා B දුම්රියපොළ අතර දුර සොයන්න.

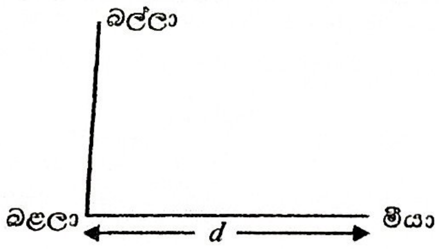
එක්තරා දිනයක දී X දුම්රිය $3u$ ප්‍රවේගයකින් A දුම්රිය ස්ථානය පසු කරමින් f නියත ත්වරණයකින් B කරා ගමන් කරයි. ඊට $\dfrac{u}{f}$ කාලයකට පසු වෙනත් Y දුම්රියක් $2u$ ප්‍රවේගයෙන් B පසුකර $2f$ නියත ත්වරණයකින් A කරා ගමන් කරයි. X හා Y දුම්රි දෙක, C දුම්රිය පොළක දී එකිනෙක හමුවේ.

(ii) එම දිනයේ දුම්රිය දෙකෙහි චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න.

(iii) **එනයින්**, දුම්රිය දෙක හමුවීම සඳහා ගතවන මුළු කාලය $\dfrac{6u}{f}$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $AC:CB$ අනුපාතය සොයන්න.

(*b*) මීයෙක් බටහිරින් උතුරට 30^0 ක දිශාවට ඒකාකාර u වේගයකින් ගමන් කරයි. මීයෙකු අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් බළලෙකු නැගෙනහිරින් උතුරට 60^0 ක් වූ දිශාවට ගමන් කරයි. බල්ලෙකු $\dfrac{u}{2\sqrt{3}}$ ක ඒකාකාර වේගයකින් නැගෙනහිර දිශාවට දිවයයි.



එක්තරා මොහොතක දී මීයා බළලාට d දුරක් නැගෙනහිරින් ද බල්ලා, බළලාට යම් දුරක් උතුරින් ද රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයකට සිටී.

බළලා නිදා සිටියේ නම්, බල්ලාට $\dfrac{4\sqrt{3}d}{u}$ කාලයක දී $\dfrac{u}{2\sqrt{3}}$ වේගයකින් ගොස් බළලාව අල්ලා ගත හැකිව තිබුණි.

(i) බළලාට මීයාව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\dfrac{\sqrt{3}d}{2u}$ බව පෙන්වන්න.

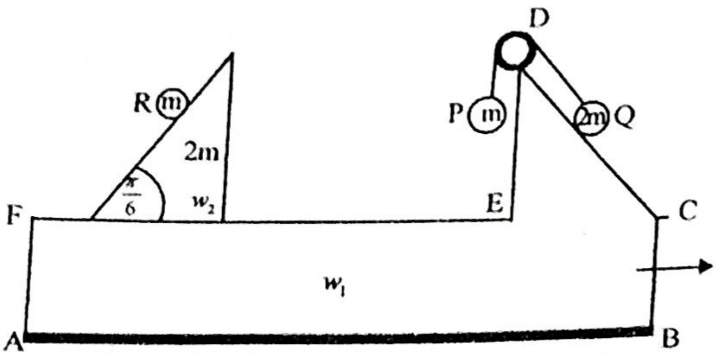
(ii) මීයාව අල්ලා ගන්නා තුරු බළලාගේ වේගය $\dfrac{u}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

මීයා අල්ලා ගත් මොහොතේ තමා ඩැහැ ගැනීමට පැමිණෙන බල්ලාව නිරීක්ෂණය කරන බළලා ක්ෂණිකව තම වේගය දෙගුණ කර නැගෙනහිරින් 30^0 ක් උතුරට වූ දිශාවට පලා ගොස් බේරේ. මේ මොහොතේ බල්ලා ද තම වේගය දෙගුණ කරයි.

(iii) බළලා බල්ලාව දකින මොහොතේ දෙදෙනා අතර දුර $\left(8-\sqrt{3}\right)\frac{d}{4}$ බව පෙන්වා බළලාගේ පිහිටීම නිර්ණය කරන්න.

(iv) බල්ලා සහ බළලා අතර කෙටිතම දුර $\frac{\left(8-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)d}{4\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$ බව පෙන්වන්න.

12. (*a*)

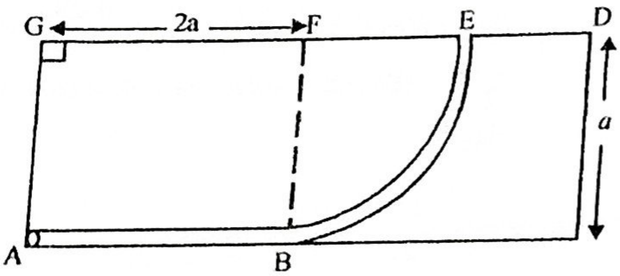


$ABCDEF$ යනු w_1 නම් සුමට ඝන වස්තුවක සිරස්කඩකි. එහි AB පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. ස්කන්ධය m සහ $2m$ වන P හා Q නම් අංශු දෙක අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර තන්තුව D හි දී w_1 ට අචලව සවිකර ඇති සුමට කප්පියක් තුළින් යවා ඇත. CD උපරිම බෑවුම් රේඛාවේ තිරසට ආනතිය $\frac{\pi}{6}$ වේ. ස්කන්ධය $2m$ වන සුමට w_2 නම් කුඤ්ඤයක් FE සුමට පෘෂ්ඨය මත තබා ඇත. w_2 හි $\frac{\pi}{6}$ ආනත පෘෂ්ඨය මත ස්කන්ධය m වූ R නම් අංශුවක් තබා ඇත. මෙම පද්ධතිය මෙලෙස සකසා ඇති විට w_1 වස්තුව නිසලතාවයේ සිට $\frac{g}{2}$ ඒකාකාර ත්වරණයෙන් තිරස්ව චලිත වීම අරඹයි. එවිට P, Q, R සහ w_2 වස්තූන් අදාළ පිහිටීම්වල සිට එකිනෙක අතර ගැටීමකින් තොරව චලිත වීම අරඹයි.

(i) ඉහත චලනය වන සෑම වස්තුවකම පොළවට සාපේක්ෂ ත්වරණයන් අභිමත අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න. එම ත්වරණයන් සෙවීමට අවශ්‍ය සියළුම සමීකරණ $F=ma$ ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.

(ii) w_1 ට සාපේක්ෂව P හා Q ත්වරණයන් එක එකක් $\frac{\sqrt{3}g}{6}$ බව පෙන්වා තන්තුවේ ආතතිය $\frac{mg}{6}\left(6-\sqrt{3}\right)$ බවත් පෙන්වන්න.

(*b*)



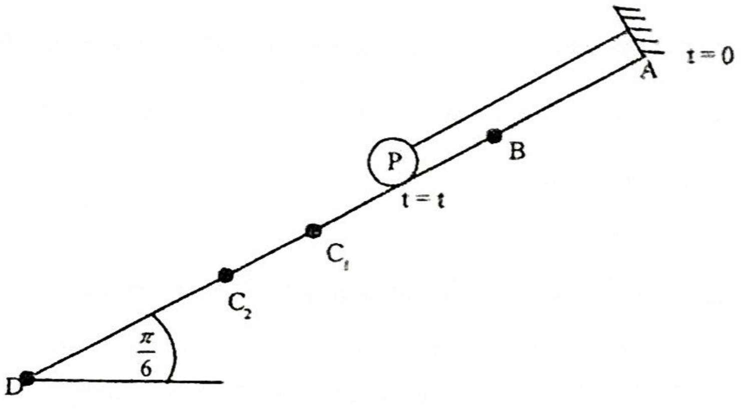
$ABCDEFG$ යනු සිහින් ABE සිදුරක් සහිත ස්කන්ධය $3m$ වන රළු ඝනකාභ හැඩැති ඝන ලී කොටයක කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස්කඩකි. එහි උස a වන අතර දිග $4a$ වෙයි. මෙම සිදුරෙහි AB තිරස් කොටස ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වන පරිදි රළු වෙයි. BE සුමට වෘත්තාකාර කොටසේ කේන්ද්‍රය F වන අතර අරය a වෙයි. මෙම ඝනකාභය ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වන රළු තිරස් පොළොවක් මත සමතුලිතව තබා. සිදුර තුළ චලනය විය හැකි ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් $\sqrt{6ga}$ ප්‍රවේගයෙන් A හි දී සිදුර තුළට තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කරයි.

(i) AB කොටස තුළ P අංශුවේ චලිතයට ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය භාවිතා කළ නොහැකි ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න. කුට්ටිය සමතුලිත යැයි උපකල්පනය කර B හි දී අංශුවේ වේගය g සහ a ඇසුරින් සොයන්න.

(ii) BE සුමට වෘත්තාකාර කොටස තුළ දී අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සිරසට θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට අංශුවේ ප්‍රවේගය සහ ප්‍රතික්‍රියාව g, a, θ ඇසුරින් සොයන්න.

(iii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ඉක්මවන විටම කුට්ටිය රළු තිරස් පොළොව මත චලිත වීම ආරම්භ කරයි නම් $\mu = \frac{k}{6+k}$ බව පෙන්වන්න. (μ යනු තිරස් තලය හා ලී කොටස අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයවේ.) මෙහි k යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.

13.



AD යනු දිග $5l$ වන අචලව සවිකර ඇති ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ වන රළු ආනත තලයකි. $AB = l$ වෙයි. ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය mg ද ස්වභාවික දිග l ද වූ ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙලවරට ස්කන්ධය $2m$ වූ P නම් අංශුවක් ගැටගසා තන්තුවේ අනෙක් කෙලවර A ලක්ෂ්‍යයට අචලව සවිකර ඇත. ආරම්භයේ දී P අංශුව A හි තබා $\sqrt{\frac{31gl}{8}}$ ප්‍රවේගයෙන් තලය දිගේ පහලට චලනය වන පරිදි ප්‍රක්ෂේපණය කරයි. P අංශුව චලනය වනුයේ AD හි උපරිම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේ වෙයි.

(i) B හි දී අංශුවේ වේගය $\sqrt{\frac{35gl}{8}}$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත් t කාලයේ දී තන්තුවේ විතතිය x නම් සුපුරුදු අංකනයෙන් $\ddot{x} = \frac{-g}{2l}\left(x - \frac{l}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$y = x - \frac{l}{2}$ ලෙස ගෙන $\ddot{y} = -\left(\frac{g}{2l}\right)y$ ලෙස ඉහත චලිත සමීකරණ නැවත ලියන්න.

(ii) y සඳහා $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින් A, B, ω නියතවල අගයන් සොයන්න. ඒනයින් සරල අනුවර්තීය චලිතයේ C_1 කේන්ද්‍රය සහ විස්ථාරය සොයන්න. A ලක්ෂ්‍යයේ සිට පහළම ලක්ෂ්‍යය දක්වා P අංශුව ගමන් කිරීමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{2l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+k\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ වන පරිදි පවතින සුළු කෝණයක් වන අතර $k = \sqrt{35}-\sqrt{31}$ වෙයි.

(iii) P අංශුවේ තලය දිගේ ඉහළට චලිතය සැලකීමෙන් අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} = -\left(\frac{g}{2l}\right)x$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි x යනු t කාලයේ දී C_2 සිට P අංශුවට ඇති විස්ථාපනයයි. $BC_2 = \frac{3l}{2}$ වෙයි. ඉහළට සිදුවන චලිතයේ දී චලිත කේන්ද්‍රය C_1 සිට C_2 දක්වා විස්ථාපනය වන බව පෙන්වා C_1C_2 දුර සොයන්න. මෙම ඉහළට සිදුවන සරල අනුවර්තීය චලිතයේ අනුරූප වෘත්ත චලිතය සැලකීමෙන් පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට තන්තුව බුරුල් වීමට ගත වූ කාලය $\sqrt{\frac{2l}{g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) $PQRS$ ත්‍රපීසියමේ $\overline{PQ} = \mathbf{a}$ සහ $\overline{PS} = \mathbf{b}$ වේ. $\overline{QT} = \frac{3}{4}\overline{QR}$ වන පරිදි QR මත T ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇති අතර, $\overline{SR} = 3\mathbf{a}$ වේ. PT සහ QS රේඛා U හි දී ඡේදනය වේ. $PU : PT = \alpha : 1$ ලෙස ගෙන $\overline{PU} = \frac{\alpha}{4}(10\mathbf{a}+3\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න. මෙහි α යනු $0 < \alpha < 1$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික නියතයකි. $\overline{PU}$ සඳහා මෙවැනිම තවත් සම්බන්ධයක් ලබා ගෙන $\alpha = \frac{4}{13}$ වන බව පෙන්වන්න. ඒනයින් $QU : US = 3 : 10$ බව තවදුරටත් ලබා ගන්න.

(b) $ABCD$ යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සමචතුරස්‍රයක් යැයිද, E යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. විශාලත්වය $5P$, QP, RP, SP වූ බල පිළිවෙලින් $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ හා $\overline{AD}$ දිගේ ක්‍රියා කරයි.

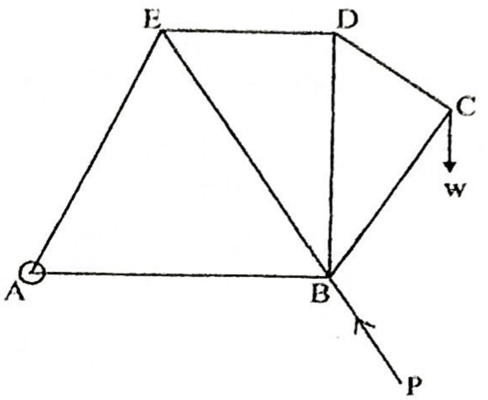
(i) මෙම බල පද්ධතිය $ADCB$ දිශාවට ක්‍රියා කරන විශාලත්වය $8aP$ වූ බල යුග්මයකට ඌනනය වේ නම් Q, R හා S හි අගයන් සොයන්න.

(ii) මෙම බල පද්ධතිය DE ඔස්සේ ක්‍රියා කරන විශාලත්වය $\sqrt{5}P$ ක් වූ තනි බලයකට ඌනනය වේ නම් Q, R හා S සඳහා ගැලපෙන අගයන් කුලක දෙකක් ඇති බව පෙන්වා ඒවා සොයන්න.

(iii) දැන් $Q = 5P$, $R = 3P$ හා $S = 4P$ අවස්ථාවේ දී විශාලත්වය G වූ යුග්මයක් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. මෙම අලුත් පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය B ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරයි. G හි අගය සහ මෙම යුග්මය ක්‍රියා කරන අත සොයන්න.

15. (*a*) දිග $2a$ හා බර පිළිවෙලින් $3w$ හා w වන ඒකාකාර AB හා BC දඬු දෙකක් B හි දී සුමටව සන්ධි කර A හා C කෙලවර සුළු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත්තේ $A\hat{B}C = 120^0$ ක් වන පරිදිවේ. මෙම සැකැස්ම A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර AB සිරස් වන පරිදි C හි දී P තිරස් බලයක් යොදා ඇත. P බලයේ විශාලත්වය $\dfrac{\sqrt{3}w}{6}$ බව පෙන්වන්න. B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සිරස් බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය සොයන්න. තන්තුවේ ආතතිය $T = \dfrac{w}{\sqrt{3}}$ බව ද පෙන්වන්න. P බලය ඉවත් කළ විට පද්ධතිය $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{11}\right)$ කෝණයකින් භ්‍රමණය වී සමතුලිත පිහිටීමකට පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

(*b*)



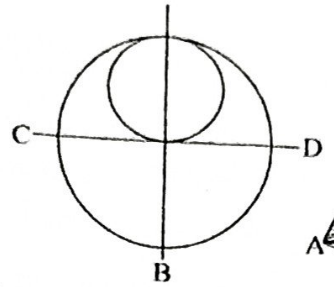
$AB, BC, CD, DE, AE, BE, BD$ සැහැල්ලු දඬු හතක් ඒවායේ කෙලවර සුමටව සන්ධි කිරීමෙන් සකසන ලද රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දැක්වේ. මෙහි AB, AE හා BE දිගින් සමාන වන අතර BD දණ්ඩ BE හා BC දඬු සමඟ 30^0 බැගින් කෝණ සාදයි. ED දණ්ඩ BD ට ලම්බ වන අතර DC දණ්ඩ BC ට ලම්බවේ. රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව සන්ධි කර C හි දී W භාරයක් එල්ලා AB තිරස් වන පරිදි BE ඔස්සේ යෙදූ P බලයක් මගින් සමතුලිතතාවයේ පවත්වා ගනී.

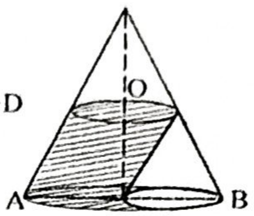
(i) P බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය යොදා සුදුසු ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් මගින්, එක් එක් දණ්ඩෙහි ප්‍රත්‍යාබලය, ආතති / තෙරපුම් වෙන්කර දක්වමින් සොයන්න.

16. උස h වන ඒකාකාර ඝන කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි ශීර්ෂයේ සිට අක්ෂය මත $\dfrac{3h}{4}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

පතුලේ අරය $2r$ සහ උස $2h$ වන ඒකාකාර ඝන ඍජු කේතුව එහි අක්ෂයට ලම්බව ශීර්ෂයේ සිට h දුරකින් ඡේදනය කිරීමෙන් කේතු ජින්නකයක් නිර්මාණය කර ඇත. එම ජින්නකයෙන් පතුලේ අරය r සහ උස h වන කේතු ආකාර කොටසක් හාරා ඉවත් කරනු ලබන්නේ, ඒවායේ වෘත්තාකාර පතුල් අභ්‍යන්තරයෙන් ස්පර්ශ වන පරිදිවේ.





ජින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකාර පතුලේ කේන්ද්‍රය O ලෙස ගෙන ශේෂ වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයන්න. AB යනු වස්තුවේ සමමිති තලයේත් විශාල පතුලේත් ඡේදන රේඛාව වන අතර CD යනු AB ට ලම්බ වූ විශාල වෘත්තාකාර පතුලේ විශ්කම්භයයි. (රූපය බලන්න.)

ශේෂ වස්තුව C හා D හි ඇඳූ කුඩා මුදු දෙකක් තුලින් යැවූ තන්තුවකින් එල්ලා ඇති විට එය සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{25}\right)$ කෝණයක් සාදයි නම් $r=\dfrac{3h}{10}$ වන බව පෙන්වන්න.

AB තල මුහුණත තිරස්ව පවත්වා ගැනීම සඳහා A ට ඇඳිය යුතු ලක්ෂාකාර ස්කන්ධය කොපමණද?

17. (a) A හා B යනු $P(A)>0$ වන සිද්ධි දෙකක් ලෙස ගනිමු. $P(B/A)$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දක්වන්න. $\{B_1, B_2, B_3\}$ යනු S නියැදි අවකාශයක විභාගනයකි. A යනු S නියැදි අවකාශය තුළ සිද්ධියක් නම්,

(i) $P(A)=\sum_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A/B_i)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $P(B_i/A)=\dfrac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)}$ බව පෙන්වන්න.
$i=1,\ 2,\ 3$

ප්‍රසිද්ධ පෞද්ගලික රෝහලක සේවය කරනු ලබන x, y, z වෛද්‍යවරු තිදෙනෙකු වැරදි රෝග විනිශ්චයකට පසු වැරදි ඖෂධ ලබා දීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙලින් $0\cdot1,\ 0\cdot8,\ 0\cdot4$ වේ.

එක්තරා දිනෙක රෝහලට පැමිණි රෝගීන් 200 ක් අතුරින් 100 ක් x විසින් ද 60 ක් y විසින් ද, 40 ක් z විසින් ද පරීක්ෂා කරනු ලැබූහ.

(i) එම දිනයේ වැරදි ඖෂධයක් නිර්දේශ කිරීමේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

(ii) එම දිනයේ රෝහලට පැමිණි එක් රෝගියෙකු වැරදි ඖෂධ ලබා ගැනීම හේතුවෙන් මිය ගියේ නම්, එම රෝගියා y වෛද්‍යවරයාගෙන් ප්‍රතිකාර ලැබුවෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා පැලෑටි වර්ගයක උස ආසන්න සෙන්ටි මීටරයට මැන පහත සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පිළියෙල කර ඇත.

උස (cm)	පැලෑටි ගණන
20 - 22	3
22 - 24	6
24 - 26	12
26 - 28	9
28 - 30	2

ඉහත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, විචලතාව හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

ඉහත විශ්ලේෂණයේ දී දත්ත සටහන් කිරීමේ දී එක් පැලෑටියක උස 20.5 cm වෙනුවට 28.5 cm ලෙස සටහන් කර තිබුණි. ඉහත මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය භාවිතා කරමින් නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.